

DEPLACEMENT

Définition: ① un **déplacement** est une isométrie qui **conserve les angles orientés**

② un **déplacement** est la composée d'un **nombre pair** de symétries orthogonales

Théorème : La composée de deux ou plusieurs déplacements est un déplacement.

Les déplacement sont :

- * Id_P : admet au moins 2 points invariants
- * $R_{(\Omega, \alpha)}$: admet Ω comme unique point invariant
- * $t_{\vec{u}}$: n'admet pas de point invariant

Théorème : Un déplacement est **UNIQUE** par son effet sur 2 points distincts du plan

(si f et g : deux déplacements qui se coïncident en 2 points et leurs images alors $f = g$)

Détermination du déplacement à partir de 2 points et leurs images :

soit f : un déplacement qui envoie A en A' et B en B'

1^{er} cas : si $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) \equiv 0[2\pi]$ et $A = A'$ alors $f = \text{Id}_P$

2^{ème} cas : si $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) \equiv 0[2\pi]$ et $A \neq A'$ alors $f = t_{\overrightarrow{AA'}}$

3^{ème} cas : si $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) \equiv \alpha[2\pi] \neq 0$ alors $f = R_{(\Omega, \alpha)}$ avec $\Omega = \text{med}[AA'] \cap \text{med}[BB']$
(si $\text{med}[AA'] = \text{med}[BB']$ alors $\Omega = (AB) \cap (A'B')$)

Déplacements et Nombres Complexes

I) de P dans $\mathbb{C}$

Soit $M(z)$ et $M'(z')$ deux points du plan et f un déplacement tel que $f(M) = M'$

Translation : L'application complexe associée à $t_{\vec{u}}$ s'écrit : $t_{\vec{u}} : z' = z + z_{\vec{u}}$.

Rotation : L'application complexe associée à $R_{(\Omega, \theta)}$ s'écrit : $R_{(\Omega, \theta)} : z' = e^{i\theta} z + z_{\Omega} \cdot (1 - e^{i\theta})$

Symétrie centrale : L'application complexe associée à S_{Ω} s'écrit : $S_{\Omega} : z' = -z + 2z_{\Omega}$

II) de $\mathbb{C}$ dans P :

Soit a et b deux nombres complexes

Soit l'application définie par : $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

$$z \rightarrow z' = az + b \text{ avec } a \in \mathbb{C}^* \text{ et } b \in \mathbb{C}$$

1^{er} Cas : si $a = 1$ et $b = 0$ alors $f = \text{Id}_P$

2^{ème} Cas : si $a = 1$ et $b \neq 0$ alors $f = t_{\vec{u}}$ avec $z_{\vec{u}} = b$

3^{ème} Cas : si $a = -1$ et b quelconque alors $f = S_{\Omega}$ avec $z_{\Omega} = \frac{1}{2}b$

4^{ème} Cas : si $a = e^{i\theta} \neq 1$ et b quelconque alors $f = R_{(\Omega, \theta)}$ avec $z_{\Omega} = \frac{b}{1-a}$

ANTIDÉPLACEMENT

Définition : ① un **antidépacement** = isométrie qui **envoie les angles orientés en leurs opposés**

② un **antidépacement** = composée d'un **nombre impair** de symétries orthogonales

Théorèmes : ① La composée de deux antidépacements et un déplacement

② La composée d'1 déplacement et d'1 antidépacement est un antidépacement

Les Antidépacements : $\begin{cases} * \text{ Symétrie orthogonale } S_{\Delta} : \text{ admet au moins 1 point invariant} \\ * \text{ Symétrie glissante } t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta} : \text{ n'admet pas de point invariant} \end{cases}$

Théorème : Un antidépacement est **UNIQUE** par son effet sur 2 points distincts du plan

(si f et g : 2 antidépacements qui se coïncident en 2 points et leurs images alors $f = g$)

Détermination de l'antidépacement à partir de 2 points et leurs images :

soit g : antidépacement qui envoie : A en A' et B en B'

1^{er} cas : si $med[AA'] = med[BB'] = \Delta$ alors $g = S_{\Delta}$

2^{ème} cas : si $med[AA'] \neq med[BB'] \Rightarrow g = \text{symétrie glissante (suivre les indications)}$

Détermination de la forme réduite de la Symétrie Glissante :

1^{er} Cas : (cas de Zorro) g : une symétrie glissante telle que $g : A \rightarrow B$ et $B \rightarrow C$

On pose $g = t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta} = S_{\Delta} \circ t_{\vec{u}} \Rightarrow g \circ g = t_{2\vec{u}}$ or $g \circ g(A) = C$ d'où $2\vec{u} = \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

d'autre part : $g(A) = B \Rightarrow A * B = I \in \Delta$ et $g(B) = C \Rightarrow B * C = J \in \Delta$ alors $\vec{u} = \overrightarrow{IJ}$

Conclusion : $g = S_{(IJ)} \circ t_{\overrightarrow{IJ}} = t_{\overrightarrow{IJ}} \circ S_{(IJ)}$ (forme réduite de g)

2^{ème} cas : (cas du milieu) g : une symétrie glissante telle que $g : A \rightarrow A'$ et $\Omega \rightarrow \Omega'$
avec $\Omega = A * A' \Rightarrow \Omega \in \Delta$ d'où $\vec{u} = \overrightarrow{\Omega\Omega'}$ et $\Delta = (\Omega\Omega')$

Conclusion : $g = S_{(\Omega\Omega')} \circ t_{\overrightarrow{\Omega\Omega'}} = t_{\overrightarrow{\Omega\Omega'}} \circ S_{(\Omega\Omega')}$ (forme réduite de g)

3^{ème} cas : (cas de décomposition)

Soit g une symétrie glissante telle que $g = t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta}$

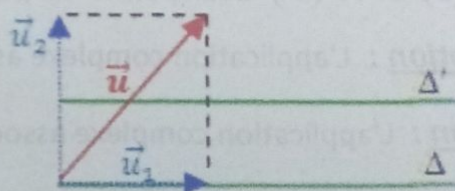
avec $\vec{u}$ n'est ni normal ni directeur à Δ

On décompose $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 \Rightarrow t_{\vec{u}} = t_{\vec{u}_1} \circ t_{\vec{u}_2}$

avec $\vec{u}_1$: directeur de Δ et $\vec{u}_2$: normal à Δ

or $t_{\vec{u}_2} = S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}$ avec $\Delta' = t_{\frac{1}{2}\vec{u}_2}(\Delta)$.

ainsi $g = t_{\vec{u}_1} \circ (S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}) \circ S_{\Delta} = t_{\vec{u}_1} \circ S_{\Delta'}$ avec $\vec{u}_1$: directeur de Δ' alors $g = t_{\vec{u}_1} \circ S_{\Delta'}$



Antidépacements et Nombres complexes

Les Symétries : ① $S_{(O\vec{u})} : z' = \bar{z}$ ② $S_{(O\vec{v})} : z' = -\bar{z}$ ③ S_{Δ} et $t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta}$: pas de formule

Réciproquement : $g : z \rightarrow z' = a\bar{z} + b$

1^{er} Cas : si $|a| = 1$, On cherche l'ensemble des points invariants par g

① si $S_{\mathbb{C}}$: une droite Δ alors $g = S_{\Delta}$

② si $S_{\mathbb{C}} = \emptyset$ alors g est une symétrie glissante (suivre les indications)

Exercice N° 01 : ABC est un triangle équilatéral direct.On appelle $I = B * C$ et $J = S_B(C)$.On considère les rotations : $R_1 = R_{(A, \frac{\pi}{2})}$ et $R_2 = R_{(B, -\frac{2\pi}{3})}$.

- 1) Soit $f = R_2 \circ R_1$. A' et B' les images de A et B par f .
 - a) Démontrer que $I = A * A'$ et $B = A * B'$. Faire une figure.
 - b) Montrer que f est une rotation dont-on caractérisera.
- 2) On considère l'application $g = R_2 \circ R_1^{-1}$
 - a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de g
 - b) $\forall M \in P$; on pose : $M_1 = R_1(M)$ et $M_2 = R_2(M)$.
Démontrer que $\forall M \in P$; $I = M_1 * M_2$

Exercice N° 02 :Dans le plan orienté, ABC est un triangle équilatéral direct,Soit I , J et K les milieux respectifs des cotés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$ et soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC .Soit Δ la perpendiculaire à la droite (AB) passant par B .On désigne par R_1 la rotation de centre C et d'angle $(\frac{\pi}{3})$ et par R_2 la rotation de centre O et d'angle $(\frac{2\pi}{3})$

- 1) a) Déterminer les droites Δ_1 et Δ_2 telles que :
 $S_{\Delta_1} = R_1 \circ S_{(OC)}$ et $S_{\Delta_2} = S_{(OC)} \circ R_2$
b) Déduire la nature et les éléments de $R_1 \circ R_2$
- 2) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de chacune des applications $R_3 = S_{\Delta} \circ S_{(BC)}$ et $R_3 \circ R_1$
- 3) On considère l'application $f = (R_1)^{-1} \circ R_3 \circ R_1$
 - a) Montrer que f rotation de centre A et d'angle $(\frac{-\pi}{3})$
 - b) En déduire que $R_1 \circ R_{(A, -\frac{\pi}{3})} = t_{\overline{AB}}$
 - c) On pose $M' = R_{(A, \frac{\pi}{2})}(M)$ et $M'' = R_1(M)$
Montrer que $ABM''M'$ est un parallélogramme.

Exercice N° 03 : Soit ABC un triangle rectangle en A de sens direct et H le projeté orthogonal de A sur (BC) On considère l'application $f = S_{(BC)} \circ S_{(AB)} \circ S_{(AC)}$.

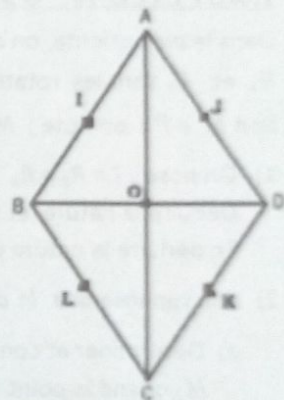
- 1) Montrer que f est un antidéplacement.
Justifier que f est une symétrie glissante
- 2) Donner la forme réduite de f .
Construire l'image du triangle ABC par f .

Exercice N° 04 : $ABCD$ est un carré de sens direct et de centre O

- 1) Soit $R = R_{(O, \frac{\pi}{2})}$. Montrer que $f = S_{(OA)} \circ R$ est une symétrie orthogonale dont-on caractérisera.
- 2) Soit l'application φ définie par : $\varphi = R \circ S_{(AB)}$
 - a) Déterminer les images de A et B par φ .
Déduire que φ est une isométrie.
 - b) Montrer que φ est une symétrie glissante dont on précisera

Exercice N° 05 : ABC est un triangle isocèle et rectangle en B et de sens direct.Soit O le milieu du segment $[AC]$.On désigne par $I = O * B$ et par $D = S_{(BC)}(O)$.Soit J le point d'intersection des droites (AD) et (BC) .

- 1) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui envoie A en C et O en D .
b) Montrer que f est une rotation de centre B et d'angle $(\frac{-\pi}{2})$
c) Soit $K = f(I)$. Montrer que K est le milieu de $[BD]$.
En déduire que les points O , J et K sont alignés.
- 2) On pose $g = S_{(BO)} \circ S_{(AB)} \circ f^{-1}$
 - a) Déterminer $g(B)$ et $g(C)$
 - b) En déduire que $f^{-1} = S_{(AB)} \circ S_{(BO)}$
- 3) On pose $h = S_{(OD)} \circ f^{-1}$.
On désigne par Δ la médiatrice du segment $[BD]$.
Montrer que h symétrie glissante d'axe Δ et de vecteur $\overline{BO}$.
- 4) Déterminer l'ensemble des points M tels que $h(M) = f^{-1}(M)$
- 5) Caractériser l'application $\varphi = S_{(BO)} \circ h$.

Exercice N° 06 :Le plan est orienté, dans la figure ci-contre, $ABCD$ est un losange de centre O avec $(\overline{AB}, \overline{AD}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$. I , J , K et L sont les milieux respectifs des segments $[AB]$; $[AD]$, $[DC]$ et $[BC]$ 

- 1) a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement f qui envoie A en B et B en D .
b) Caractériser f .
- 2) a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement g qui transforme A en D et J en K .
b) Caractériser g .
- 3) a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement h qui transforme B en D et C en B .
b) Caractériser h .
- 4) a) Soit l'application $\varphi = f^{-1} \circ h$. Déterminer $\varphi(B)$ et $\varphi(L)$
b) En déduire la nature et les éléments de l'application φ

Exercice N° 07 :Soit $ABCD$ carré de centre O et direct. $M = S_B(D)$ et $I = B * M$ Les points P , Q , P' et Q' sont les projetés orthogonaux de M respectivement sur les droites (AB) , (AD) , (CD) et (CB) .

- 1) a) Montrer que $MPBQ'$ est un carré de sens direct
b) En déduire qu'il existe un unique déplacement f qui envoie P en M et M en Q' .
c) Caractériser le déplacement f .

- 2) Construire $D' = f(D)$ et montrer que $D' \in (DC)$
- 3) Déterminer l'image par f de la droite (MQ') puis $f(Q)$.
Dédire que les droites (MC) et (PQ) sont perpendiculaires
- 4) a) Montrer qu'il existe un seul antidéplacement g qui envoie P en M et Q en C .
b) Vérifier que $g = f \circ S_{(PQ)}$
c) Soit Ω : milieu de $[AB]$. Construire $\Omega' = g(\Omega)$.
Vérifier que $\Omega = C * Q$. En déduire la forme réduite de g .

Exercice N° 08 :

ABC un triangle isocèle en A tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \theta [2\pi]$.

On pose $H = B * C$ et $B_1 = S_A(B)$

- 1) a) Déterminer la nature et les éléments des applications :
 $f = t_{\overrightarrow{BC}} \circ R_{(A, \theta)}$ et $g = R_{(B, \pi - \theta)} \circ R_{(C, \pi - \theta)}$
b) $\forall M \in P$; on pose $M' = g \circ R_{(A, \theta)}(M)$.
Déterminer θ pour que AMM' soit équilatéral.
- 2) On prend $\theta = \frac{\pi}{6}$. On construit à l'extérieur du triangle ABC les carrés $ACC''C''$ et $ABB'B''$. On pose $I = (BB'') \cap (CC'')$
a) Montrer que $(B''C) \perp (C''B)$ et que $B''C = C''B$
b) Montrer qu'il existe un unique déplacement φ et un unique antidéplacement ψ qui envoient C en B et C'' en B'' .
Caractériser l'antidéplacement ψ puis le déplacement φ
- 3) Déterminer la nature et les éléments de $h = t_{\overrightarrow{AC}} \circ S_{(AH)}$

Exercice N° 09 :

Dans le plan orienté, on considère A et B : deux points distincts.

R_A et R_B sont les rotations de centres A et B et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Soit $M \in P$; on note : $M_1 = R_A(M)$ et $M_2 = R_B(M)$.

- 1) On pose : $T = R_B \circ R_A^{-1}$. Construire l'image C du point A par T .
Dédire la nature et les éléments caractéristiques de T .
En déduire la nature du quadrilatère M_1M_2CA .
- 2) On suppose que M décrit le cercle $(\mathcal{C})$ de diamètre $[AB]$
a) Déterminer et construire l'ensemble $(\mathcal{C}_2)$ décrit par le point M_2 quand le point M décrit le cercle $(\mathcal{C})$.
b) Soit I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[BC]$.
Ecrire $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AC}$
c) Déterminer l'ensemble que décrit par $K = M_1 * M_2$ quand M décrit $(\mathcal{C})$.

Exercice N° 10 :

ABI triangle équilatéral tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ et $\Omega = S_{(AI)}(B)$.

- 1) Soit R la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ et qui transforme A en I .
a) Montrer que Ω est le centre de cette rotation.
b) Soit $C = R(B)$. Montrer que $I = A * C$
- 2) $\forall M \in [AB] \setminus \{A, B\}$; on associe le point $M' \in [IC]$ / $AM = IM'$.
Montrer que $\Omega MM'$ est équilatéral.
- 3) On désigne par $E = B * C$ et $O = B * \Omega$
a) Montrer qu'il existe un seul antidéplacement σ qui envoie A en I et B en C .
b) Montrer que σ n'est pas une symétrie orthogonale.
c) Montrer que $\sigma(\Omega) = B$ (On pourra utiliser la conservation de distance). Déterminer alors la forme canonique de σ .

- 4) On pose $\varphi = S_{(IE)} \circ S_{(AB)} \circ S_{(IE)} \circ S_{(IC)}$.
Déterminer la nature et les éléments de φ .

- 5) On pose $g = R_{(A, -\frac{\pi}{3})} \circ R_{(I, -\frac{2\pi}{3})}$.
Déterminer la nature et les éléments de g .

Exercice N° 11 :

On considère un carré $ABCD$ de centre I et de sens direct
On désigne par J et K les milieux respectifs de $[AD]$ et $[CD]$.
Soit E le point tel que DBE est équilatéral de sens direct.

- 1) a) On pose $\psi = t_{\overrightarrow{BC}} \circ S_{(AC)}$. Déterminer $\psi(A)$ et $\psi(D)$
b) En déduire que ψ est une symétrie glissante et déterminer ses éléments caractéristiques.
- 2) Montrer qu'il existe un unique déplacement R qui envoie B en A et A en D . Caractériser R
- 3) Soit l'application $g = R_{(B, \frac{\pi}{6})} \circ R_{(E, \frac{\pi}{3})}$. Déterminer $g(D)$.
Dédire la nature et les éléments caractéristiques de g .
- 4) Soit $f = R_{(I, \frac{\pi}{2})}$. On pose $T = g \circ f^{-1}$.
Déterminer $T(A)$ puis caractériser T .
- 5) Soit M un point du plan. On pose $M' = f(M)$ et $M'' = g(M)$
a) Quelle est la nature du quadrilatère $ABM''M'$?
b) Montrer qu'il existe un seul antidéplacement φ qui envoie A en M' et D en M'' .
c) Comparer les applications φ et $t_{\overrightarrow{AM'}} \circ S_{(AI)}$.
En déduire la nature et les éléments caractéristiques de φ dans chacun des cas suivants :
i) $M \in (BD)$ ii) $M \in$ à la parallèle à (AC) passant par D

Exercice N° 12 :

Déterminer la nature et les éléments des applications suivantes :

- 1) $z' = z - 3i + 5$ 2) $z' = jz - 3 + 2i$
- 3) $z' = iz + (1 + i)$ 4) $z' = -z + 3 - i$
- 5) $z' = -iz + \frac{1}{2}$ 6) $z' = e^{\frac{\pi}{3}}z + \frac{1}{2}(1 - e^{\frac{\pi}{3}})$

Exercice N° 13 :

Ecrire l'écriture complexe associée aux applications suivantes :

- 1) $R_{(\Omega, -\frac{\pi}{2})}$ avec $\Omega(1 + 2i)$ 2) $t_{\vec{u}}$ tel que $\text{aff}(\vec{u}) = 4 - i$
- 3) S_{Ω} avec $\Omega(3 + 2i)$ 4) $R_{(\Omega, \frac{2\pi}{3})}$ avec $\Omega(2 - i)$

Exercice N° 14 :

Le plan P étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

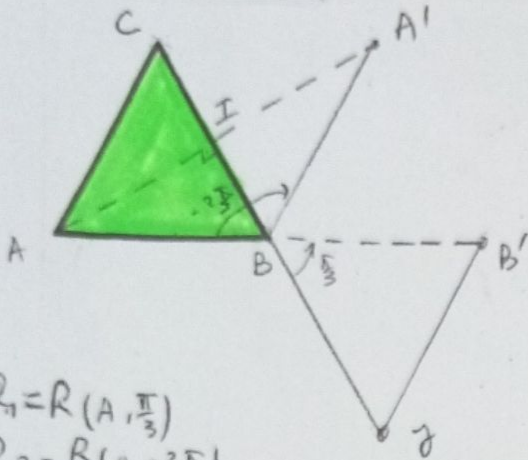
On considère l'application f définie par $f : M(z) \mapsto M'(z')$
tel que $z' = i\bar{z}$

- 1) Montrer que f est la composée d'une rotation R dont on précisera et d'une symétrie orthogonale S d'axe $(O\vec{u})$.
- 2) En décomposant la rotation R en deux symétries orthogonales, montrer que f est une symétrie orthogonale dont on précisera
- 3) Soit $g : M(z) \rightarrow M''(z'')$ tel que $z'' = i\bar{z} + 1 + i$
a) Caractériser l'application $T = g \circ f$
b) En déduire une construction de $M'' = g(M)$
c) Soit I : milieu de M et M'' .
Montrer que $\forall M \in P$, I appartient à une droite fixe.

Déplacements & Antidéplacements

2020 - 2021

Exercice N° 01 :



$$R_1 = R(A, \frac{\pi}{3})$$

$$R_2 = R(B, -\frac{2\pi}{3})$$

$$f = R_2 \circ R_1 : \begin{matrix} A \rightarrow A' \\ B \rightarrow B' \end{matrix}$$

$$1) a) \text{ et } b) \quad I = A * A'$$

$$\text{on a } f(A) = R_2(R_1(A)) = R_2(A) = A'$$

$$\Rightarrow \begin{cases} BA = BA' \\ (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BA'}) \equiv -2\frac{\pi}{3} [2\pi] \end{cases}$$

$$\text{or } BA = AC \Rightarrow AC = BA \quad (1)$$

$$c) \quad (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA'}) = (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BA'}) [2\pi]$$

$$= (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) + \pi + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BA'}) [2\pi]$$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA'}) = -\frac{\pi}{3} + \pi - \frac{2\pi}{3} \equiv 0 [2\pi] \quad (2)$$

$$(1) \text{ et } (2) \Rightarrow \begin{cases} AC = BA' \\ \overrightarrow{AC} \text{ col à } \overrightarrow{BA'} : \text{ même sens} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA'}$$

$$\text{d'où } AC A'B \# \Leftrightarrow \boxed{A * A' = B * C = I}$$

$$e) \text{ et } f) \quad B = A * B'$$

$$\text{on a } f(B) = R_2(R_1(B)) = R_2(C) = B'$$

$$\text{on a } \begin{cases} BC = BB' \\ (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BB'}) \equiv -2\frac{\pi}{3} [2\pi] \end{cases}$$

$$\text{or } BC = BA = BB'$$

$$c) \quad (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BB'}) = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BB'}) [2\pi]$$

$$= -\frac{\pi}{3} - 2\frac{\pi}{3} \equiv \pi [2\pi]$$

$$\text{donc } \begin{cases} BA = BB' \\ (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BB'}) \equiv \pi [2\pi] \end{cases} \Rightarrow \boxed{A * B' = B}$$

$$b) \quad f = R_2 \circ R_1 = R(B, -\frac{2\pi}{3}) \circ R(A, \frac{\pi}{3})$$

alors f : composée de 2 rotations de

centres différents et dont la Σ des angles égale $\pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow f = R(\gamma, -\frac{\pi}{3})$

$$\text{or } f(A) = A' \Rightarrow \Omega \in \text{med}(AA') = (BC)$$

$$\text{et } f(B) = B' \Rightarrow \Omega \in \text{med}(BB')$$

or le triangle $BB'\gamma$ équilatéral car :

$$S_B : \begin{matrix} A \rightarrow B' \\ B \rightarrow B \\ C \rightarrow \gamma \end{matrix} \quad \left| \begin{matrix} \text{comme } ABC \text{ éq} \\ \Rightarrow S_B(ABC) = BB'\gamma \text{ équilat.} \end{matrix} \right.$$

$$\Rightarrow \gamma B = \gamma B' \Leftrightarrow \gamma \in \text{med}(BB') \text{ or } \gamma \in (BC) = \text{med}(AA')$$

$$\Rightarrow \text{med}(BB') \cap \text{med}(AA') = \gamma \Rightarrow \Omega = \gamma$$

$$\text{Concl : } \boxed{f = R(\gamma, -\frac{\pi}{3})}$$

$$2) a) \quad g = R_2 \circ R_1^{-1}$$

$$\text{on a } R_1^{-1} = R(A, -\frac{\pi}{3}) = R(A, \frac{2\pi}{3})$$

$$\Rightarrow g = R(B, -\frac{2\pi}{3}) \circ R(A, \frac{2\pi}{3})$$

alors g : composée de 2 rotations de centres différents et dont la Σ

des angles égale à $\pi \Rightarrow g = S_{\Omega}$

d'autre part : $A \xrightarrow{R_1^{-1}} A' \xrightarrow{R_2} A'$

$$\Rightarrow g(A) = A' \Leftrightarrow S_{\Omega}(A) = A'$$

$$\Leftrightarrow \Omega = A * A' = I \Rightarrow \boxed{g = S_I}$$

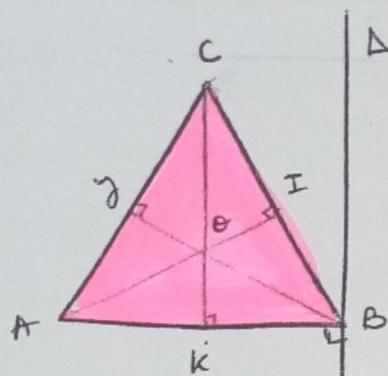
$$b) \quad R_1(M) = M_1 \text{ et } R_2(M) = M_2$$

$$\text{on a } M_1 \xrightarrow{R_1^{-1}} M \xrightarrow{R_2} M_2$$

$$\Rightarrow R_2 \circ R_1^{-1}(M_1) = M_2 \Leftrightarrow g(M_1) = M_2$$

$$\Leftrightarrow S_I(M_1) = M_2 \Leftrightarrow \boxed{I = M_1 * M_2}$$

Exercice N° 02 :



$$R_1 = R(c, \frac{\pi}{3}) \quad \text{et} \quad R_2 = R(o, 2\frac{\pi}{3})$$

a) $S_{D_1} = R_1 \circ S_{(oc)}$: antideplacement
 $c \xrightarrow{S_{(oc)}} c \xrightarrow{R_1} c \Rightarrow c \in D_1$
 $B \xrightarrow{S_{(oc)}} A \xrightarrow{R_1} B \Rightarrow B \in D_1$
 $\Rightarrow D_1 = (CB)$

$S_{D_2} = S_{(oc)} \circ R_2$: antideplacement
 $o \xrightarrow{R_2} o \xrightarrow{S_{(oc)}} o \Rightarrow o \in D_2$
 $A \xrightarrow{R_2} B \xrightarrow{S_{(oc)}} A \Rightarrow A \in D_2$
 $\Rightarrow D_2 = (OA)$

b) on a $S_{D_1} = R_1 \circ S_{(oc)} \Rightarrow R_1 = S_{D_1} \circ S_{(oc)}$
 $\text{et } S_{D_2} = S_{(oc)} \circ R_2 \Rightarrow R_2 = S_{(oc)} \circ S_{D_1}$
 $\Rightarrow R_1 \circ R_2 = S_{D_1} \circ S_{(oc)} \circ S_{(oc)} \circ S_{D_1}$
 $= S_{(cb)} \circ S_{(oa)} = S_I$
 car $(CB) \perp (OA)$ en I
 concl : $R_1 \circ R_2 = S_I$

$$2) R_3 = S_D \circ S_{(BC)} = R(b, -\frac{\pi}{3})$$

$$\text{car } D \cap (BC) = \{B\}$$

$$2(\widehat{BC, D}) = 2(\widehat{BC, BA} + \widehat{BA, D})$$

$$= 2(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{3} \quad (2\pi)$$

$R_3 \circ R_1 = S_D \circ S_{(BC)} \circ S_{(BC)} \circ S_{(oc)}$
 $= S_D \circ S_{(oc)} = t_{2\vec{kb}}$

$$\text{car } D // (OC) \perp (AB)$$

$$\Rightarrow R_3 \circ R_1 = t_{\vec{AB}}$$

$$3) f = R_1^{-1} \circ R_3 \circ R_1$$

a) f est la composée de 3 rotations de centres différents et dont la somme des angles est $(-\frac{\pi}{3})$
 $\Rightarrow f = R(A, -\frac{\pi}{3})$

or $A \xrightarrow{R_1} B \xrightarrow{R_3} B \xrightarrow{R_1^{-1}} A$
 $\Rightarrow f(A) = A \Rightarrow A$: centre de f
 d'où $f = R(A, -\frac{\pi}{3})$

b) $f = R(A, -\frac{\pi}{3}) \Leftrightarrow R_1^{-1} \circ R_3 \circ R_1 = R(A, -\frac{\pi}{3})$
 or $R_3 \circ R_1 = t_{\vec{AB}}$
 $\Rightarrow R_1^{-1} \circ t_{\vec{AB}} = R(A, -\frac{\pi}{3})$
 $\Leftrightarrow t_{\vec{AB}} = R_1 \circ R(A, -\frac{\pi}{3})$

c) $R(A, \frac{\pi}{3}) : M \rightarrow M'$
 $R_1 : M \rightarrow M''$

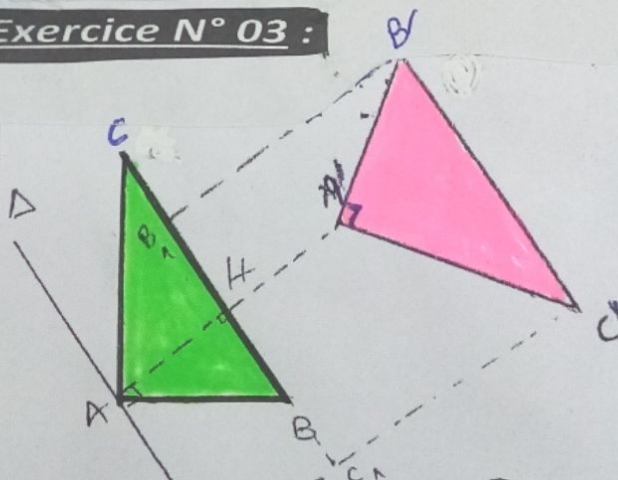
on a $ABM''M'$ est un #

ma $M' \xrightarrow{R(A, -\frac{\pi}{3})} M \xrightarrow{R_1} M''$

$$\Rightarrow R_1 \circ R(A, -\frac{\pi}{3})(M') = M''$$

$\Leftrightarrow t_{\vec{AB}}(M') = M'' \Leftrightarrow \vec{AB} = \vec{M'M''}$
 d'où $ABM''M'$ est un #

Exercice N° 03 :



$$f = S_{(BC)} \circ S_{(AB)} \circ S_{(AC)}$$

1) a) f est la composée d'un nombre impair de symétries orthogonales $\Rightarrow$
 f est un antideplacement

b) f antideplacement $\Rightarrow \begin{cases} \vec{OA} \rightarrow \vec{OB} \\ \vec{OB} \rightarrow \vec{OC} \end{cases} f = S_{\Delta}$
 f : sym glissante

Par l'absurde, on suppose qu'il existe Δ CP telle que $f = S_{\Delta} \Rightarrow$

$$S(BC) \circ S(AB) \circ S(AC) = S_{\Delta} \Leftrightarrow$$

$$S(AB) \circ S(AC) = S(BC) \circ S_{\Delta}$$

$$\alpha(AB) \perp (AC) \text{ en } A \Rightarrow f(AB) \circ f(AC) = S_A$$

$$\Rightarrow S_A = S(BC) \circ S_{\Delta} \text{ : absurde}$$

(car $A \notin (BC)$)

alors f n'est pas symétrie orthogonale
 or f : antideplacement $\Rightarrow f$ est une
 symétrie glissante.

2) a) on a $f = S(BC) \circ S(AB) \circ S(AC)$

$$\Leftrightarrow f = S(BC) \circ S_A$$

Soit Δ : la $\perp \vec{a}(AH)$ en A

$$\Rightarrow S_A = S(AH) \circ S_{\Delta} = S_{\Delta} \circ S(AH)$$

d'où $f = S(BC) \circ S_{\Delta} \circ S(AH)$

comme $\Delta // (BC) \perp (AH)$

$$\Rightarrow S(BC) \circ S_{\Delta} = t_{2\vec{AH}}$$

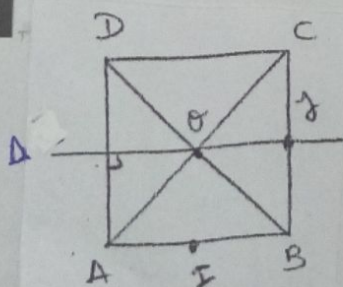
d'où $f = t_{2\vec{AH}} \circ S(AH)$ forme réduite

b) $A \xrightarrow{S(AH)} A' \xrightarrow{t_{2\vec{AH}}} A'' / \vec{AA''} = 2\vec{AH}$
 $B \xrightarrow{S(AH)} B_1 \xrightarrow{t_{2\vec{AH}}} B' / \vec{AB'} = \text{md}[BB_1]$
 $\vec{B_1B} = 2\vec{AH}$

c) $C \xrightarrow{S(AH)} C_1 \xrightarrow{t_{2\vec{AH}}} C' / \vec{AC'} = \text{md}[CC_1]$
 $\vec{C_1C} = 2\vec{AH}$

Exercice N° 04 :

ABCD carré
 de sens direct
 et O: centre du
 carré ABCD



1) $R = R(O, \frac{\pi}{2})$, $S = S(OA) \circ R$

S : composée d'un déplacement et d'un
 antidepl $\Rightarrow S$: antideplacement.

$$\text{or } O \xrightarrow{R} O \xrightarrow{S(OA)} O \Rightarrow S(O) = O$$

$\Rightarrow S$: n'est pas sym glissante

$\Rightarrow S$: symétrie orthogonale $\Rightarrow S = S_{\Delta}$

d'autre part: $\begin{cases} OD = OA \\ (\vec{OD}, \vec{OA}) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases} \Rightarrow R(D) = A$

$$\Rightarrow D \xrightarrow{R} A \xrightarrow{S(OA)} A$$

$$\Rightarrow S_{\Delta}(D) = A \Leftrightarrow \Delta = \text{md}[\vec{DA}]$$

concl: $S = S_{\Delta} / \Delta = \text{md}[\vec{AD}]$

2) $\varphi = R \circ S(AB)$

a) $A \xrightarrow{S(AB)} A \xrightarrow{R} B$ car $\begin{cases} OA = OB \\ (\vec{OA}, \vec{OB}) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi(A) = B}$$

$B \xrightarrow{S(AB)} B \xrightarrow{R} C$ car $\begin{cases} OB = OC \\ (\vec{OB}, \vec{OC}) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$

alors $\boxed{\varphi(B) = C}$

b) $\varphi: A \rightarrow B \mid B \rightarrow C$ or $AB = BC \neq 0$

alors φ est une isométrie

c) φ : composée d'un déplacement et d'un
 antidepl $\Rightarrow \varphi$: antideplacement

$$\text{md}(AB) \neq \text{md}(BC) \Rightarrow \varphi \neq S_{\Delta}$$

d'où φ : sym glissante dont la

forme réduite Soit $\varphi = t_{\vec{u}} \circ S_{\vec{v}}$ et $\vec{v}$: dir de Δ

d'où $\varphi \circ \varphi = t_{2\vec{u}}: A \rightarrow C$

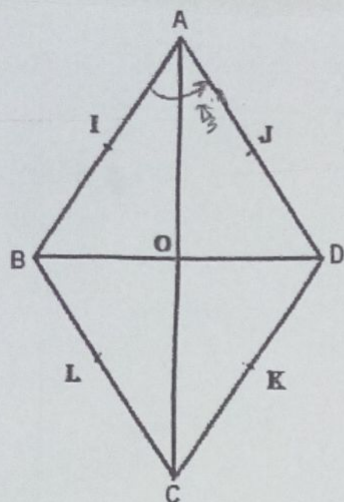
d'où $2\vec{u} = \vec{AC} \Leftrightarrow \vec{u} = \frac{1}{2}\vec{AC} = \vec{IO} / \vec{I} = A * B$
 $\vec{J} = B * C$

d'autre part $\varphi(A) = B \Rightarrow A * B = \vec{I} \in \Delta$

et $\varphi(B) = C \Rightarrow B * C = \vec{J} \in \Delta$

d'où $\Delta = (IJ)$

concl: $\boxed{\varphi = t_{\vec{IJ}} \circ S(IJ)}$

Exercice N° 06 :

1) a) $Mq \exists !$ antidepl. $f: A \rightarrow B$
 $B \rightarrow D$

ona $ABCD$ losange $\Rightarrow AB = AD$
 or $(\vec{AB}, \vec{AD}) = \frac{\pi}{3} (2\pi) \Rightarrow ABD$ équilatéral
 d'où $AB = BD \neq 0$ alors il existe un
 unique antideplacement $f: A \rightarrow B$
 $B \rightarrow D$

b) on suppose que $f = S_D \Rightarrow f \circ f = \text{Id}_D$
 or $f \circ f(A) = D \Leftrightarrow \text{Id}_D(A) = D \neq A$ Absurde
 $\Rightarrow f$ symétrie glissante dont la forme
 réduite s'écrit $f = t_{\vec{u}} \circ S_D = S_D \circ t_{\vec{u}}$
 $\Rightarrow f \circ f = t_{2\vec{u}}: A \rightarrow D \Leftrightarrow 2\vec{u} = \vec{AD}$
 $\Rightarrow \vec{u} = \frac{1}{2} \vec{AD} = \vec{AO}$ car $\begin{cases} I = A+B \\ O = B+D \end{cases}$

d'autre part $\begin{cases} f(A) = B \Rightarrow A+B = I \in D \\ f(B) = D \Rightarrow B+D = O \in D \end{cases} \Rightarrow D = \{I, O\}$

Concl. : $f = t_{\vec{AO}} \circ S_D$

2) a) $Mq \exists !$ antidepl. $g: A \rightarrow D$
 $J \rightarrow K$

ona $J = A+D \Rightarrow AJ = \frac{1}{2} AD$

$AD = DC = 2DK \Rightarrow AJ = DK \neq 0$

alors il existe unique antidepl. $g: A \rightarrow D$
 $J \rightarrow K$

b) $\text{med}(AD) = (BJ) \wedge \text{med}(BJ) \neq (BJ)$
 $\text{med}(JK) = (BD)$

$\Rightarrow g$ n'est pas symétrie orthogonale

or g : antidepl $\Rightarrow g$ symétrie glissante
 dont la forme réduite s'écrit :

$g = t_{\vec{u}} \circ S_D = S_D \circ t_{\vec{u}} / \vec{u} : \text{dir de } D$

or $g(A) = D \Rightarrow A+D = J \in D$
 d'où $J \xrightarrow{S_D} J \xrightarrow{t_{\vec{u}}} K$ d'où $\vec{JK} = \vec{u}$
 et D : la // à (JK) passant par $J = D = (JK)$

Concl. : $g = t_{\vec{JK}} \circ S_D$

3) a) $Mq \exists !$ antidepl. $h: B \rightarrow D$
 $C \rightarrow B$

ona $BC = BA = BD \neq 0$

$\Rightarrow \exists !$ antidepl. $h: B \rightarrow D$
 $C \rightarrow B$

b) On suppose que $h = S_D \Rightarrow h \circ h = \text{Id}_D$
 or $h \circ h(C) = D \Leftrightarrow \text{Id}_D(C) = D \neq C$ Absurde
 $\Rightarrow h \neq S_D \Rightarrow h$ symétrie glissante
 or h : antidepl

dont la forme réduite s'écrit :

$h = t_{\vec{v}} \circ S_D = S_D \circ t_{\vec{v}}$

$\Rightarrow h \circ h = t_{2\vec{v}}: C \rightarrow D \Leftrightarrow 2\vec{v} = \vec{CD}$

$\Rightarrow \vec{v} = \frac{1}{2} \vec{CD} = \vec{LO}$ car $\begin{cases} L = C+B \\ O = D+B \end{cases}$

et $h(C) = B \Rightarrow C+B = L \in D \Rightarrow D = \{L, O\}$
 $h(B) = D \Rightarrow B+D = O \in D$

Concl. : $h = t_{\vec{LO}} \circ S_D$

4) $\varphi = f^{-1} \circ h$

a) $\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{h} & D \xrightarrow{f^{-1}} B \\ L & \xrightarrow{h} & O \xrightarrow{f^{-1}} I \end{array}$

car $I \xrightarrow{S_D} I \xrightarrow{t_{\vec{LO}}} O$

$\Rightarrow f(I) = O \Leftrightarrow f^{-1}(O) = I$

Concl. : $\varphi(B) = B$ et $\varphi(L) = I$

b) $\varphi = f^{-1} \circ h$: composée de 2
 antideplacements $\Rightarrow \varphi$ est un déplacement

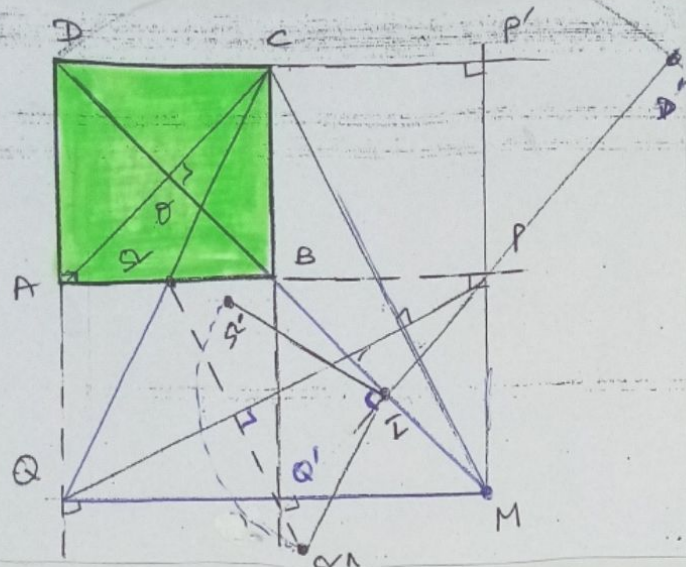
$\Rightarrow \varphi = \text{Id}_D$
 ou $\varphi = R$

or $\varphi(L) = I = L \neq \varphi \neq \text{Id}_D$

Concl. : $\varphi = R(B, \alpha)$ car B : invariant
 avec $\alpha = (\vec{BL}, \vec{BI}) = 2(\vec{BD}, \vec{BH}) = \frac{2\pi}{3}$

Concl. : $\varphi = R(B, \frac{2\pi}{3})$

Exercice N° 07 :



1) a) Mq MPBQ' : carré direct

$$\text{ma } S_B: \begin{array}{l} D \longrightarrow M \\ (AB) \longrightarrow (AB) \\ (DC) \longrightarrow (MP) \end{array} \Rightarrow$$

$$S_B((AB) \cap (DC)) = (AB) \cap (MP) \Leftrightarrow S_B(A) = P$$

$$S_B: \begin{array}{l} (BC) \longrightarrow (BC) \\ (DC) \longrightarrow (MQ) \end{array} \Rightarrow$$

$$S_B((BC) \cap (DC)) = (BC) \cap (MQ) \Leftrightarrow S_B(C) = Q'$$

$$\text{d'où } S_B: \begin{array}{l} A \longrightarrow P \\ B \longrightarrow B \\ C \longrightarrow Q' \\ D \longrightarrow M \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \text{Comme } ABCD \text{ carré} \\ \text{direct et que } S_B \text{ défl.} \\ \Rightarrow PBQ'M \text{ est aussi} \\ \text{carré de sens direct} \end{array} \right.$$

b) PBQ'M carré $\Rightarrow PM = MQ' \neq 0$

d'où il existe un unique déplacement f qui envoie $P \longrightarrow M$
 $M \longrightarrow Q'$

$$c) (\vec{PM}, \vec{MQ'}) = (\vec{MP}, \vec{MQ'}) + \pi \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$$

$$\text{alors } f = R(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) / \Omega = \text{med}(PM) \cap \text{med}(MQ')$$

$$\Leftrightarrow \Omega = I: \text{Centre du carré } PBQ'M$$

$$\text{Concl: } \boxed{f = R(I, \frac{\pi}{2})}$$

$$2) f(D) = D' \Leftrightarrow R(I, \frac{\pi}{2})(D) = D'$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ID = ID' \\ (\vec{ID}, \vec{ID'}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi) \end{cases}$$

$$Mq \ D' \in (DC)$$

Le triangle IDD' : rectangle isocèle en I
 $\Rightarrow (\vec{DI}, \vec{DD'}) \equiv \frac{\pi}{4} (2\pi)$ ①

Le triangle DOC : rectangle isocèle en O
 $\Rightarrow (\vec{DC}, \vec{DO}) \equiv -\frac{\pi}{4} (2\pi)$ ②

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \Rightarrow (\vec{DC}, \vec{DO}) + (\vec{DI}, \vec{DD'}) \equiv 0 (2\pi)$$

or $\vec{DO}$ et $\vec{DI}$: colinéaires même sens

$$\Rightarrow (\vec{DC}, \vec{DO}) + (\vec{DO}, \vec{DD'}) \equiv 0 (2\pi)$$

$$\Rightarrow (\vec{DC}, \vec{DD'}) \equiv 0 (2\pi)$$

alors D, D', C : alignés $\Rightarrow \boxed{D' \in (DC)}$

3) comme $f = R(I, \frac{\pi}{2}) \Rightarrow f(MQ')$ est

la $\perp$ à $\vec{a}(MQ')$ passant par $f(M) = Q'$

$$\Rightarrow \boxed{f(MQ') = (MP)}$$

$$\bullet Q = (MQ') \cap (AD)$$

$$\Rightarrow f(Q) = f(MQ') \cap f(AD)$$

$f(AD)$ est la $\perp$ à $\vec{a}(AD)$ passant par $f(D) = D'$

$$\Rightarrow f(AD) = (DD') \text{ car } D, C, D' \text{ alignés}$$

$$\Rightarrow f(Q) = (MP) \cap (DD') = C$$

$$\text{concl: } \boxed{f(Q) = C}$$

$$\bullet f: \begin{array}{l} P \longrightarrow M \\ Q \longrightarrow C \end{array} \Rightarrow \begin{cases} (\vec{PQ}, \vec{MC}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi) \\ \text{d'où } \boxed{(\vec{PQ}) \perp (\vec{MC})} \end{cases}$$

4) a) comme $PQ = MC \neq 0 \Rightarrow$ il existe un unique antidéplacement g qui transforme $P \longrightarrow M$ et Q en C

$$b) Mq \ g = f \circ S(PQ)$$

$$\text{ma } P \xrightarrow{S(PQ)} P \xrightarrow{f} M \Rightarrow f \circ S(PQ)(P) = M$$

$$\text{et } Q \xrightarrow{S(PQ)} Q \xrightarrow{f} C \Rightarrow f \circ S(PQ)(Q) = C$$

$f \circ S(PQ)$: composée d'un défl. et d'un antidéfl.

$\Rightarrow f \circ S(PQ)$: antidéplacement

d'où $f \circ S(PQ)$ et g : 2 antidéplacements qui se coincident en 2 points et leurs images $\Rightarrow g = f \circ S(PQ)$

c) $S = A * B$, $g(S) = S'$

$S \xrightarrow{f(PQ)} S_1 \xrightarrow{f} S'$
avec $(PQ) = \text{méd}(SS_1)$ et $\left\{ \begin{array}{l} |SS_1| = |S_1S'| \\ (\overrightarrow{SS_1}, \overrightarrow{S_1S'}) = -\frac{\pi}{2} \end{array} \right.$

• Mq $S = C * Q$.

Les carrés $ABCD$ et $BQ'MP$ sont isométriques

$\Rightarrow AB = BQ'$ alors $ABQ'A$ carré

alors le quadrilatère $DCQ'A$ est un rectangle avec $A = D * Q$ et $B = C * Q'$

$A * B = S$: centre de $DCQ'A$

Concl: $S = C * Q$

Forme Réduite de g .

g antidéplacement $\begin{cases} g = S_D \\ \text{ou} \\ g: \text{sym glissante} \end{cases}$

et comme $\text{méd}(PM) \neq \text{méd}(QC)$

$\Rightarrow g$ n'est pas symétrie orthogonale
alors g : symétrie glissante dont la forme réduite s'écrit:

$g = t_{\vec{u}} \circ S_D$ / $\vec{u}$: direction de Δ

ou $g: Q \rightarrow C$
 $S \rightarrow S'$

comme $S = Q * C$ alors $S \in \Delta$

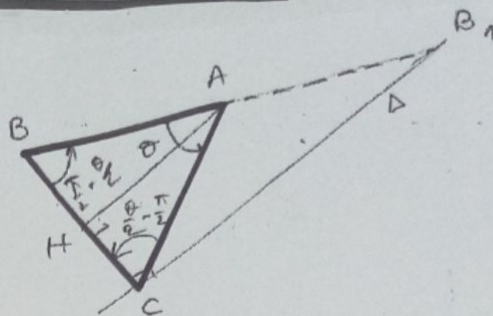
d'où $S \xrightarrow{S_D} S \xrightarrow{t_{\vec{u}}} S'$

alors $\vec{u} = \overrightarrow{SS'}$

et Δ : la $\parallel \vec{u} = \overrightarrow{SS'}$ passant par S
 $\Delta = (SS')$

Concl: $g = t_{\overrightarrow{SS'}} \circ S(SS')$

Exercice N° 08 :



1) a) $f = t_{\vec{BC}} \circ R(A, \theta)$

soit D : la $\perp \vec{a}(BC)$ passant par C

$\Rightarrow t_{\vec{BC}} = S_D \circ S(AH)$

et $R(A, \theta) = S(AH) \circ S(AB)$

car $\begin{cases} (AH) \cap (AB) = A \\ 2(\widehat{AB}, \widehat{AH}) = (\widehat{AB}, \widehat{AC}) = \theta(2\pi) \end{cases}$

$\Rightarrow f = S_D \circ \underbrace{S(AH) \circ S(AB)}_{\text{id}_P} \circ S(AC)$

$\Rightarrow f = S_D \circ S(AB) = R(B_1, \theta)$

car $\begin{cases} (AB) \cap \Delta = B_1 \\ 2(\widehat{AB}, \widehat{AB_1}) = 2(\widehat{AB}, \widehat{AH}) = \theta(2\pi) \end{cases}$

Concl: $f = R(B_1, \theta)$

$g = R(B, \pi - \theta) \circ R(C, \pi - \theta)$

comme ABC isocèle en $A \Rightarrow$

$(\widehat{AC}, \widehat{BA}) = (\widehat{CA}, \widehat{CB}) = (\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2})(2\pi)$

d'où $R(B, \pi - \theta) = S(BA) \circ S(BC)$

et $R(C, \pi - \theta) = S(CB) \circ S(CA)$

$g = S(BA) \circ S(BC) \circ S(CB) \circ S(CA)$

$\Rightarrow g = S(BA) \circ S(CA) = R(A, -2\theta)$

Concl: $g = R(A, -2\theta)$

b) $\forall M \in P$, $g \circ R(A, \theta)(M) = M'$

ou $g \circ R(A, \theta) = R(A, -2\theta) \circ R(A, \theta) = R(A, -\theta)$

$R(A, -\theta)(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} AM = AM' \\ (\widehat{AM}, \widehat{AM'}) = -\theta(2\pi) \end{cases}$

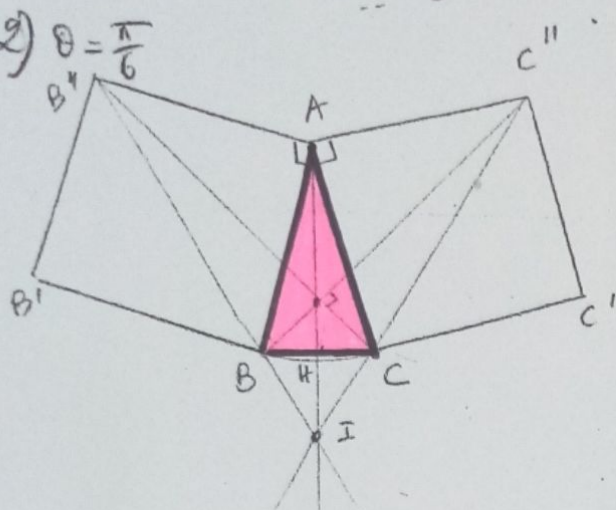
d'où AMM' équilatéral $\Leftrightarrow$

$$(\vec{AM}, \vec{AM'}) = \pm \frac{\pi}{3} (2\pi) \Rightarrow -\theta = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$\Rightarrow \theta = \mp \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

Concl: Si $\theta \in \{-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\} \Rightarrow AMH'$ équilibré

$$2) \theta = \frac{\pi}{6}$$



a) on a $AB = AC \Rightarrow$ Les carrés $ABB'B''$ et $ACC'C''$ sont isométriques
d'où $S_{(AH)}: ABB'B'' \rightarrow ACC'C''$

$$\text{alors } R_{\left(\frac{A, \pi}{2}\right)}: \begin{cases} C \rightarrow C'' \\ B'' \rightarrow B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (CB'', C'B) = \frac{\pi}{2} (2\pi) \\ CB'' = BC'' \end{cases}$$

$$\text{d'où } (CB'') \perp (C'B) \text{ et } B''C = C'B$$

b) Les carrés $ABB'B''$ et $ACC'C''$ sont isométriques
 $\Rightarrow BB'' = CC'' \neq 0$ (diagonales isométriques)
 $\Rightarrow$ il existe un unique déplacement ψ
et il existe un unique antidéplacement ψ
qui envoie: $C \rightarrow B$ et $C'' \rightarrow B''$
Caractérisation de ψ :

$$\psi: \text{antidéplacement: } \begin{cases} C \rightarrow B \\ C'' \rightarrow B'' \end{cases}$$

$$\text{Comme } \text{med}(CB) = \text{med}(C''B'') = (AH)$$

$$\Rightarrow \boxed{\psi = S_{(AH)}}$$

Caractérisation de ψ :

$$\psi: \text{déplacement: } \begin{cases} C \rightarrow B \\ C'' \rightarrow B'' \end{cases}$$

$$\alpha((\vec{CC'}), (\vec{BB''})) = (\vec{CC'}, \vec{CA}) + (\vec{CA}, \vec{BA}) + (\vec{BA}, \vec{BB''}) \\ = \frac{\pi}{4} + (\vec{AC}, \vec{AB}) + \frac{\pi}{4} (2\pi)$$

$$\Rightarrow (\vec{CC'}, \vec{BB''}) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} (2\pi) \neq 0$$

$$\Rightarrow \psi = R(\Omega, \frac{\pi}{3})$$

$$\alpha((\vec{IC'}, \vec{IB})) = \alpha((\vec{IC''}, \vec{IB''})) = \frac{\pi}{3} (2\pi) \\ \text{et } I = (CC') \cap (BB'') \Rightarrow I \in (AH) \\ \Rightarrow IB = IC \text{ et } IC'' = IB'' \\ \Rightarrow I: \text{centre de } R \\ \text{concl: } \boxed{\psi = R(I, \frac{\pi}{3})}$$

$$3) h = t_{\vec{AC}} \circ S_{(AH)} \\ = t_{\vec{AH} + \vec{HC}} \circ S_{(AH)} \\ = t_{\vec{AH}} \circ t_{\vec{HC}} \circ S_{(AH)} \\ = t_{\vec{AH}} \circ (S_{\Delta} \circ S_{(AH)}) \circ S_{(AH)}$$

$$\text{avec } \Delta = \text{med}(HC)$$

$$\Rightarrow t_{\vec{HC}} = S_{\Delta} \circ S_{(AH)}$$

$$\text{d'où } h = t_{\vec{AH}} \circ S_{\Delta}$$

$$\text{Comme } \Delta \perp (HC) \wedge \Delta \parallel (AH) \\ (AH) \perp (HC)$$

$$\Rightarrow \vec{AH} \text{ direction de } \Delta$$

$$\text{d'où } \boxed{h = t_{\vec{AH}} \circ S_{\Delta}} \text{ forme réduite de la symétrie glissante}$$

Exercice N° 09:

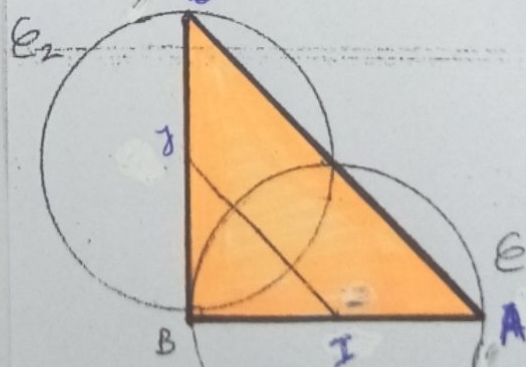
$$R_A = R(A, \frac{\pi}{2}) \text{ et } R_B = R(B, \frac{\pi}{2})$$

$$R_A: M \rightarrow M_1$$

$$R_B: M \rightarrow M_2$$

$$1) T = R_B \circ R_A^{-1}$$

$$a) A \xrightarrow{R_A^{-1}} C \xrightarrow{R_B} C \Rightarrow \begin{cases} BA = BC \\ (\vec{BA}, \vec{BC}) = \frac{\pi}{2} (2\pi) \end{cases}$$



b) T est la composée de 2 rotations de centres différents et dont la 2^e des angles est nulle $\Rightarrow T = t_{\vec{u}}: A \rightarrow C$
 $\Rightarrow \vec{u} = \vec{AC}$. Concl: $\boxed{T = t_{\vec{AC}}}$

$$c) M_1 \xrightarrow{R_A^{-1}} M \xrightarrow{R_B} M_2$$

$$\text{donc } R_B \circ R_A^{-1}(M_1) = M_2 \Leftrightarrow t_{AC}(M_1) = M_2$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{M_1 M_2} \text{ alors } \boxed{M_1 M_2 CA \#}$$

$$2) M \text{ décrit } E = E[AB]$$

a) Ensemble des points M_2 lorsque M varie :

$$\text{car } R(B, \frac{\pi}{2})(M) = M_2$$

$$\text{comme } M \text{ décrit } E[AB] \Rightarrow$$

$$M_2 \text{ décrit } R(B, \frac{\pi}{2})(E[AB]) = E[CB] = E_2$$

$$\text{car } R_2: \begin{matrix} A \rightarrow C \\ B \rightarrow B \end{matrix}$$

$$\text{Concl. : Si } M \text{ décrit } E[AB] \Rightarrow M_2 \text{ décrit } E[BC]$$

b) Dans le triangle ABC : on a :

$$\begin{cases} I = B * A \\ J = B * C \end{cases} \Rightarrow \boxed{IJ = \frac{1}{2} AC}$$

$$c) K = M_1 * M_2 : \text{ Ensemble des pts } K$$

$$M_1 M_2 CA \# \Rightarrow M_1 M_2 = AC$$

$$\text{or } K = M_1 * M_2 \Rightarrow \overrightarrow{M_1 M_2} = 2 \overrightarrow{KM_2}$$

$$\text{et } \overrightarrow{AC} = 2 \overrightarrow{IJ}$$

$$\text{donc } 2 \overrightarrow{KM_2} = 2 \overrightarrow{IJ} \Rightarrow \overrightarrow{KM_2} = \overrightarrow{IJ}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{M_2 K} = \overrightarrow{JI} \Leftrightarrow t_{JI}(M_2) = K$$

$$\text{or } M_2 = R(B, \frac{\pi}{2})(M)$$

$$\Rightarrow t_{JI} \circ R(B, \frac{\pi}{2})(M) = K$$

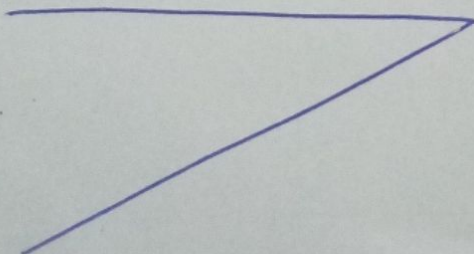
$$\text{or si } M \in E[AB] \Rightarrow M_2 \in E[BC]$$

$$\text{et } K \text{ décrit } t_{JI}(E[BC]) = E[AB]$$

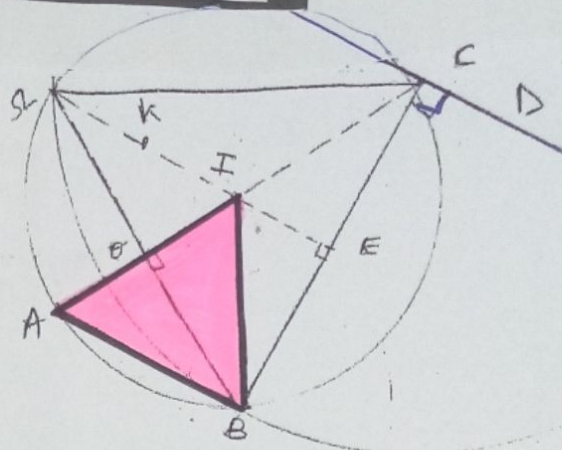
car J : centre de $E[BC]$

et I : centre de $E[AB]$

$$\text{Concl. : Si } M \text{ décrit } E[AB] \Rightarrow K \text{ décrit } E[AB]$$



Exercice N° 10 :



$$1) R : \text{ rotation d'angle } \frac{\pi}{3} / R(A) = I$$

$$a) \text{ Or } S : \text{ centre de } R$$

$$\text{car } S(AI): \begin{matrix} B \rightarrow SI \\ A \rightarrow A \\ I \rightarrow I \end{matrix}$$

$$\text{car } \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BI} \Rightarrow SA = SI$$

$$\text{et } (\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SI}) = -(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BI}) = \frac{\pi}{3} (2\pi)$$

alors S : centre de R

$$b) R(B) = C \Leftrightarrow \begin{cases} IB = IC \\ (SIB, SIC) = \frac{\pi}{3} (2\pi) \end{cases}$$

$$\text{Or } I = B * C$$

$$\text{car } R: \begin{matrix} A \rightarrow I \\ B \rightarrow C \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} AB = IC \\ (AB, IC) = \frac{\pi}{3} (2\pi) \end{cases}$$

$$\text{car alors } \begin{cases} AB = IC \\ AB = IA \end{cases} \Rightarrow IA = IC$$

$$(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IC}) = (\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{IC}) (2\pi)$$

$$= (\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AB}) + \pi + \frac{\pi}{3} = \pi (2\pi)$$

$$\text{alors } IA = IC \text{ et } (\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IC}) = \pi \Rightarrow \boxed{I = A * C}$$

$$2) M \in [AB] \setminus \{A, B\} \mapsto M' \in [IC] / AM = IM'$$

• M et M' équidistants ?

$$\text{on pose } R(M) = N$$

$$\text{or } M \in [AB] \Rightarrow R(M) = N \in R([AB]) = [IC]$$

$$\text{et } R: \begin{matrix} A \rightarrow I \\ M \rightarrow N \end{matrix} \mid \Rightarrow AM = IN$$

$$\text{or } M' \in [IC] / AM = IM'$$

$$\text{donc par identification } N = M'$$

$$\text{alors } R(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} SM = SM' \\ (\overrightarrow{SM}, \overrightarrow{SM'}) = \frac{\pi}{3} (2\pi) \end{cases}$$

$$\text{donc } SM = SM' \text{ et } \angle MSM' = \frac{\pi}{3} \forall M \in [AB]$$

$$3) E = B \neq C \quad \text{et} \quad 0 = B \neq SL$$

$$a) \text{ N'q's! antidepl } \sigma: \begin{matrix} A \rightarrow I \\ B \rightarrow C \end{matrix}$$

$$\text{oua } R: \begin{matrix} A \rightarrow I \\ B \rightarrow C \end{matrix} \Rightarrow AB = IC \neq 0$$

d'où il existe un unique antidepl σ qui envoie $A \rightarrow I$ et $B \rightarrow C$

$$b) \text{ med } (AI) = (BI) \text{ car } ABIS \text{ losge}$$

$$\text{et } \text{med } (IC) \neq (BS)$$

$\Rightarrow \sigma$ n'est pas une symétrie orthogonale

$$c) \text{ Nq } \sigma(SL) = B$$

$$\text{on pose } \sigma(SL) = A' \Rightarrow \sigma: \begin{matrix} A \rightarrow I \\ B \rightarrow C \\ SL \rightarrow A' \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A'I = IB = BC \Rightarrow A' \in \mathcal{E}(C, CB) \\ A'I = IA = AB \Rightarrow A' \in \mathcal{E}(I, AB) \end{cases}$$

$$\Rightarrow A' \in \mathcal{E}(C, CB) \cap \mathcal{E}(I, AB) = \{A, B\}$$

$$\Rightarrow A' = A \quad \text{ou} \quad A' = B$$

or σ : antidepl $\neq$ sym orthogonale

$\Rightarrow \sigma$: symétrie glissante n'ayant pas de points inv $\Rightarrow \sigma(SL) \neq SL \Rightarrow A' = B$

$$\text{Concl: } \boxed{\sigma(SL) = B}$$

d) σ : sym glissante dont la forme canonique s'écrit: $\sigma = t_{\vec{u}} \circ S_{(OE)}$ avec $\vec{u}$: dir de Δ

$$\text{or } \sigma: \begin{matrix} A \rightarrow B \\ B \rightarrow C \end{matrix} \Rightarrow \sigma \circ \sigma(SL) = C$$

$$\text{et } \text{car } \sigma \circ \sigma = t_{2\vec{u}}: SL \rightarrow C$$

$$\Rightarrow 2\vec{u} = \vec{SLC} \Leftrightarrow \vec{u} = \frac{1}{2} \vec{SLC} = \vec{OE}$$

$$\text{et } \sigma(A) = B \Rightarrow A \neq B = 0 \in \Delta \quad \text{et} \quad \sigma(B) = C \Rightarrow B \neq C = E \in \Delta$$

$$\Delta \neq (OE)$$

$$\text{Concl: } \boxed{\sigma = t_{\vec{OE}} \circ S_{(OE)}}$$

$$4) \varphi = S_{(IE)} \circ S_{(AB)} \circ S_{(IE)} \circ S_{(IC)}$$

$$(IE) \perp (BC) \text{ car } (IE): \text{med } [BC]$$

$$AI = IB = IC \Rightarrow ABC: \text{rectgle en } B$$

$$I = A \times C \Rightarrow (AB) \perp (BC)$$

$$\text{d'où } (IE) \parallel (AB)$$

$$\text{alors } S_{(IE)} \circ S_{(AB)} = t_{2\vec{BE}} = t_{\vec{BC}}$$

$$\text{et } S_{(IE)} \circ S_{(IC)} = R(I, -2\frac{\pi}{3})$$

$$\text{car } (IE) \cap (IC) = \{I\}$$

$$2(\vec{IE}, \vec{IC}) = (\vec{IE}, \vec{IB}) = -2\frac{\pi}{3} (2\pi)$$

$$\Rightarrow \varphi = t_{\vec{BC}} \circ R(I, -2\frac{\pi}{3})$$

$$S_D \circ S_{(IE)} \circ S_{(IE)} \circ S_{(IC)}$$

avec D : la $\perp$ à (BC) passant par C

$$\Rightarrow \varphi = S_D \circ S_{(IC)} = R(C, -2\frac{\pi}{3})$$

$$\text{car } D \cap (IC) = \{C\} \text{ et } 2(\vec{IC}, \vec{CD}) = \frac{4\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3}$$

$$\text{Concl: } \boxed{\varphi = R(C, -2\frac{\pi}{3})}$$

$$5) g = R(A, -\frac{\pi}{3}) \circ R(I, -2\frac{\pi}{3})$$

g : composée de 2 rotations de centres $\neq$ et dont la Σ des angles est égale à $\pi + 0$

$\Rightarrow g$ est une symétrie centrale, on pos $g = S_K$

$$\text{or } I \xrightarrow{R(I, -2\frac{\pi}{3})} I \xrightarrow{R(A, -\frac{\pi}{3})} SL$$

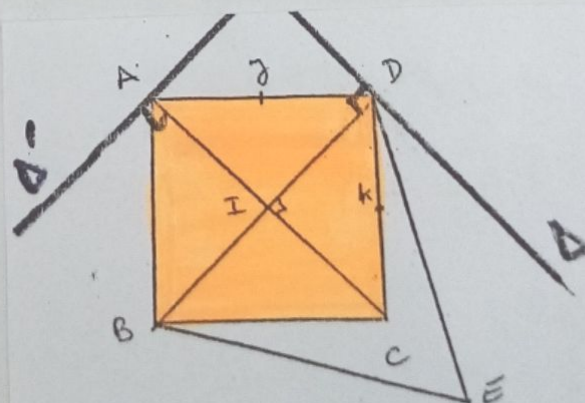
$$\text{car } R(SL, \frac{\pi}{3})(A) = I \Leftrightarrow IA \perp AI \text{ éq}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{matrix} AI = IA \\ \frac{AI}{AI}, \frac{ASL}{ASL} \end{matrix} \right\} = \frac{\pi}{3} (2\pi)$$

$$\Rightarrow g(I) = SL \Rightarrow S_K(I) = SL$$

$$\text{alors } K = I \times SL \quad \text{Concl: } \boxed{g = S_K}$$

Exercice N° 11:



$$1) \varphi = t_{\vec{BC}} \circ S_{(AC)}$$

$$a) A \xrightarrow{S_{(AC)}} A \xrightarrow{t_{\vec{BC}}} D \Rightarrow \varphi(A) = D$$

$$D \xrightarrow{S_{(AC)}} B \xrightarrow{t_{\vec{BC}}} C \Rightarrow \varphi(D) = C$$

b) ψ : composée d'1 dégl et d'1 antidégl
 $\Rightarrow \psi$ antidégl or $\text{med}(AD) \neq \text{med}(DC)$
 $\Rightarrow \psi$: symétrie glissante dont la ligne
 reduite s'écrit $\psi = t_{\vec{u}} \circ S_D = S_D \circ t_{\vec{u}}$

d'où $\psi \circ \psi = t_{2\vec{u}}: A \rightarrow C$

$$\Rightarrow 2\vec{u} = \vec{AC} \Leftrightarrow \vec{u} = \frac{1}{2}\vec{AC} = \vec{JK} \text{ (Thales)}$$

$$\psi(A)=D \Rightarrow A * D = J \in \Delta \quad \psi(D)=C \Rightarrow D * C = K \in \Delta \quad \Rightarrow \Delta = (JK)$$

Concl: $\boxed{\psi = t_{\vec{JK}} \circ S_{(AI)}}$

2) a) $ABCD$ carré $\Rightarrow BA = AD \neq 0$
 $\Rightarrow$ il existe un unique dégl $R: B \rightarrow A$
 $A \rightarrow D$
 d'autre part $(\vec{BA}, \vec{AD}) = (\vec{AB}, \vec{AD}) + \pi = -\frac{\pi}{2} \neq 0$
 $\Rightarrow R$: rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$
 et de centre $\text{med}(AB) \cap \text{med}(AD) = I$

b) $\boxed{R = R(I, -\frac{\pi}{2})}$

$$3) g = R(B, \frac{\pi}{6}) \circ R(C, \frac{\pi}{3})$$

$$D \xrightarrow{R(C, \frac{\pi}{3})} B \xrightarrow{R(B, \frac{\pi}{6})} B \Rightarrow g(D) = B$$

$$g = R(I, \frac{\pi}{3}): D \rightarrow B \Leftrightarrow \begin{cases} CD = CB \\ (\vec{CD}, \vec{CB}) = \frac{\pi}{3} (2\pi) \end{cases} \Rightarrow \Omega = C$$

$$\text{Concl: } \boxed{g = R(C, \frac{\pi}{3})}$$

$$4) f = R(I, \frac{\pi}{2}) \quad T = g \circ f^{-1}$$

$$\text{or } \begin{cases} ID = IA \\ (\vec{IB}, \vec{IA}) = \frac{\pi}{2} (2\pi) \end{cases} \Rightarrow f(D) = A$$

$$\text{d'où } f^{-1}(A) = D \Rightarrow T(A) = g(D) = B$$

$$\text{Car } \begin{cases} CD = CB \\ (\vec{CB}, \vec{CA}) = \frac{\pi}{2} (2\pi) \end{cases} \Rightarrow \boxed{T(A) = B}$$

T : composée de 2 rotations de centres $\neq$
 et dont la Σ des angles égale à 0

$$\Rightarrow T = t_{\vec{u}}: A \rightarrow B \quad \text{d'où } \boxed{T = t_{\vec{AB}}}$$

$$5) f(M) = M' \text{ et } g(M) = M''$$

$$a) M' \xrightarrow{f^{-1}} M \xrightarrow{g} M''$$

$$\Rightarrow g \circ f^{-1}(M') = M'' \Leftrightarrow T(M') = M''$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{M'M''} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \boxed{ABM''M' \#}$$

b) or $M'M'' = AB \wedge M'M'' = AD \neq 0$
 $AB = AD$
 d'où il existe unique antidégl ψ
 qui envoie $A \rightarrow M'$
 $D \rightarrow M''$

$$c) \text{ or } \psi = t_{\vec{AM'}} \circ S_{(AI)} ?$$

$$\text{or } A \xrightarrow{S_{(AI)}} A \xrightarrow{t_{\vec{AM'}}} M' \Rightarrow t_{\vec{AM'}} \circ S_{(AI)}(A) = M'$$

$$D \xrightarrow{S_{(AI)}} B \xrightarrow{t_{\vec{AM'}}} M'' \Rightarrow t_{\vec{AM'}} \circ S_{(AI)}(D) = M''$$

$\bullet t_{\vec{AM'}} \circ S_{(AI)}$: antidéplacement
 d'où ψ et $t_{\vec{AM'}} \circ S_{(AI)}$: 2 antidéplacements
 qui se coïncident en 2 points et leurs
 images $\Rightarrow \boxed{\psi = t_{\vec{AM'}} \circ S_{(AI)}}$

Nature de ψ :

$\bullet$ Si $M \in (BD) \Rightarrow M' \in R(I, \frac{\pi}{2})(BD)$
 $\Rightarrow M' \in (AC)$ alors $\vec{AM'}$ col à $\vec{AI}$
 alors $\vec{AM'}$ direction de (AI)
 d'où ψ : sym glissante d'axe (AI)
 et de vecteur $\vec{AM'}$

$\bullet$ Si $M \in D$ la // à (AC) passant par D
 $\Rightarrow M' \in f(D) = D'$: la $\perp$ à Δ passant par A
 $\Rightarrow \vec{AM'} \perp \vec{AI}$ d'où il existe une
 droite $D'' \parallel (AI) / t_{\vec{AM'}} = S_{D''} \circ S_{(AI)}$
 $\Rightarrow \psi = S_{D''} \circ S_{(AI)} \circ S_{(AI)} \Rightarrow \boxed{\psi = S_{D''}}$

Exercice N° 12 :

$$1) z' = z + 5 - 3i \Rightarrow a = 1$$

$$\Rightarrow \boxed{f = t_{\vec{u}}} / z\Omega = 5 - 3i$$

$$2) z' = iz - 3 + 2i \Rightarrow a = f = e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

$$\Rightarrow \boxed{f = R(\Omega, \frac{2\pi}{3})} / z\Omega = \frac{-3 + 2i}{1 - i}$$

$$\Leftrightarrow z\Omega = \frac{-3 + 2i}{\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i} = \left(-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + i\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$3) z' = iz + 1 + i \Rightarrow a = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow \boxed{f = R(\Omega, \frac{\pi}{2})} / z\Omega = \frac{1 + i}{1 - i} = i$$

$$4) z' = -z + 3 - i \Rightarrow a = -1$$

$$\text{d'où } \boxed{f = S_{\Omega}} / z\Omega = \frac{b}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$5) z' = -iz + \frac{1}{2} \Rightarrow a = -i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

$$\Rightarrow f = R(\pi, \frac{\pi}{2}) / z_0 = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2}$$

$$6) z' = e^{i\frac{\pi}{3}} z + \frac{1}{2}(1 - e^{i\frac{\pi}{3}}) \Rightarrow a = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$\Rightarrow f = R(\pi, \frac{\pi}{3}) / z_0 = \frac{\frac{1}{2}(1 - e^{i\frac{\pi}{3}})}{1 - e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{1}{2}$$

Exercice N° 13 :

1) $R(\pi, \frac{\pi}{2})$ avec $s(1+2i) \Rightarrow$ L'application complexe associée à R s'écrit :

$$z' = e^{-i\frac{\pi}{2}} z + z_0(1 - e^{-i\frac{\pi}{2}})$$

$$z' = -iz + (1+2i)(1+i)$$

$$\Rightarrow R: \boxed{z' = -iz - 1 + 3i}$$

2) $t_{\vec{u}}$ tel que $\text{aff}(\vec{u}) = 4 - i$
 $\Rightarrow$ L'application complexe associée à t s'écrit : $z' = z + z_0$

$$\Rightarrow \boxed{z' = z + 4 - i}$$

3) S_s / $s(3+2i) \Rightarrow$ L'application complexe associée à S_s s'écrit : $z' = -z + 2z_0$

$$\Rightarrow \boxed{z' = -z + 6 + 4i}$$

4) $R(\pi, \frac{2\pi}{3})$ avec $z_0 = 2 - i$
 L'application complexe associée à R s'écrit :

$$z' = e^{i\frac{2\pi}{3}} z + z_0(1 - e^{i\frac{2\pi}{3}})$$

$$\Rightarrow z' = \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + (2-i)\left(1 + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{z' = \frac{1}{2}z + \left(3 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - i\left(\sqrt{3} + \frac{3}{2}\right)}$$

Exercice N° 14 :

$$f: z' = i\bar{z}$$

$$1) \left. \begin{array}{l} S(\vec{ou}): M(z) \mapsto M_2(z_1 = \bar{z}) \\ R(0, \frac{\pi}{2}): M_1(z_1) \mapsto M'(z' = iz_1) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$z' = iz_1 = i\bar{z} \quad R(0, \frac{\pi}{2}) \quad S(\vec{ou})$$

$$\Rightarrow f = R(0, \frac{\pi}{2}) \circ S(\vec{ou})$$

$$2) R(0, \frac{\pi}{2}) = S_{\Delta} \circ S(\vec{ou})$$

avec $\Delta: y = x$ (la ligne bissectrice)

$$\text{car } \Delta \cap (O\vec{u}) \mid \Rightarrow f = R(0, \frac{\pi}{2}) \circ S(\vec{ou})$$

$$\text{et } (O\vec{u}, \Delta) = \frac{\pi}{4} \quad f = S_{\Delta} \circ S(\vec{ou})$$

$$\text{Concl: } \boxed{f = S_{\Delta}} / \Delta: y = x$$

$$3) g: M(z) \mapsto M''(z'') / z'' = i\bar{z} + 1 + i$$

$$a) T = g \circ f$$

$$M(z) \xrightarrow{f} M'(z') \xrightarrow{g} M''(z'')$$

$$\text{avec } z' = i\bar{z}$$

$$\text{et } z'' = (z') + 1 + i = i(\bar{z}) + 1 + i$$

$$\Rightarrow z'' = i(-iz) + 1 + i \Rightarrow z'' = z + 1 + i$$

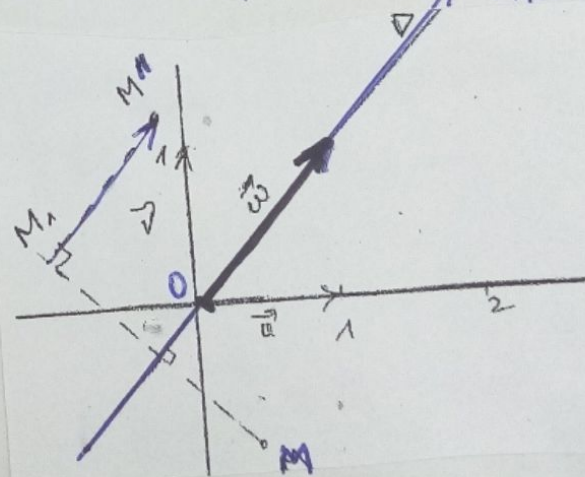
$$\text{alors } \boxed{T = t_{\vec{w}}} / \text{aff}(\vec{w}) = 1 + i$$

$$b) T = g \circ f \Rightarrow g = T \circ f^{-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{g = t_{\vec{w}} \circ S_{\Delta}} : \vec{w} \text{ dir de } \Delta$$

alors g : symétrie glissante d'axe Δ et de vecteur $\vec{w}$

$$M \xrightarrow{S_{\Delta}} M_1 \xrightarrow{t_{\vec{w}}} M'' / \begin{array}{l} \Delta = \text{med}(MM_1) \\ \vec{M_1M''} = \vec{w} \end{array}$$



c) $I = M \neq M''$ Mais $I \in$ droite fixe

$$z_I = \frac{z + z''}{2} = \frac{z + i\bar{z} + 1 + i}{2} \quad \text{mpe } z = x + iy$$

$$\Rightarrow z_I = \frac{x + iy + i(x - iy) + 1 + i}{2} = \frac{(x + y + 1) + i(1 + y - x)}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_I = \frac{x + y + 1}{2} \\ y_I = \frac{x + y + 1}{2} \end{cases} \Rightarrow x_I = y_I \text{ alors } I \in \Delta$$

Concl: $I \in \Delta$: droite fixe